Zéros de fonctions

NOM et PRENOM : .... *Il faut tout justifier et expliquer !*

1. On donne la fonction $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 1$.

a. Combien cette fonction admet-elle de zéros réels ? Prouvez rigoureusement ce résultat.

b. Quelle autre méthode permettrait de prouver le même résultat ? Ne faites pas les calculs, mais expliquez clairement cette seconde méthode.

c. Avec la valeur initiale $x_0 = 2$, déterminez un zéro de f avec 4 décimales exactes à l'aide de la méthode de Newton.

d. A l'aide des hypothèses de Fourier (rappelées ci-dessous), prouvez que cette valeur $x_0 = 2$ définit bien une suite de Newton convergente.

e. Déterminez les exclus de premier type (dérivée).

f. Déduisez-en une équation polynômiale à coefficients entiers dont un zéro est un exclu d'un autre type. On ne demande pas de calculer ce nouvel exclu !

Théorème 2

Hypothèses de Fourier :

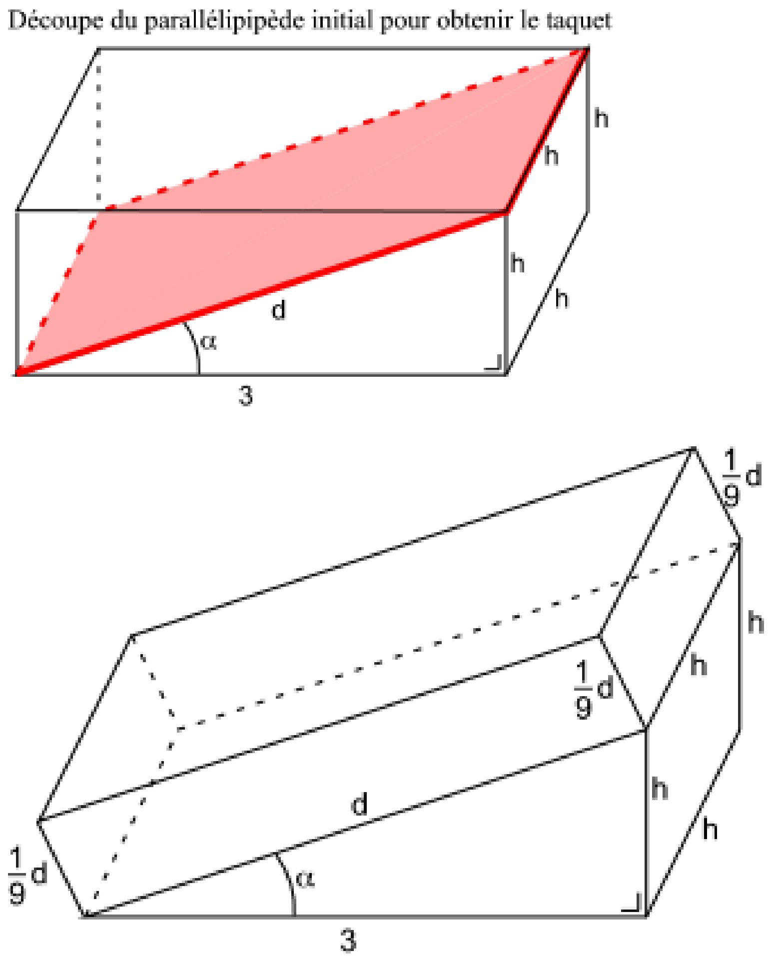
1. *f est deux fois continûment dérivable dans $I = [a; b]$;*
2. *$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a) \cdot f(b) < 0$) ;*
3. *f' est de signe constant (non nul) dans I ;*
4. *f'' est de signe constant dans I.*

Lorsque ces quatre hypothèses sont satisfaites, la suite de Newton de premier terme x_0 est monotone et convergente pour toute valeur x_0 de I telle que $f(x_0)$ ait le signe de f''.

Tournez s.v.p.

2. *Toutes les longueurs de ce problème sont données en mètres.*

Voir illustrations. On construit un prisme droite triangulaire en coupant en deux un parallélipipède rectangle de dimensions $3 \times h \times h$ à l'aide d'un plan diagonal (première illustration). Il en résulte un angle α entre la base de ce prisme et la surface diagonale (colorée). Sur cette surface diagonale, de dimensions $d \times h$ on pose un parallélipipède rectangle de hauteur $\frac{1}{9}d$ admettant cette surface pour base (seconde illustration). Le volume total de ce solide est de 5m^3.



a. Montrez – en la calculant – que l'équation dont l'angle α est une solution est

$$6\tan^3\alpha + 27\tan^2\alpha + 6\tan\alpha - 10 = 0$$

b. Expliquez pourquoi cette équation admet une solution $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$. Ne calculez pas cette solution.