Lineare Algebra 2

Begründen Sie Ihre Antworten!

1. Sei $h : E \longrightarrow F$ eine lineare Abbildung.

a. Beweisen Sie, dass $Ker(h)$ ein Unterraum von E ist.

b. Geben Sie die Definition von $Im(h)$ an.

c. Geben Sie – wenn es möglich ist – drei Beispiele von Isomorphismen aus $\mathbb{R}^4$ in $M_2(\mathbb{R})$ an (ohne Erklärung). Wenn es nicht möglich ist, erklären Sie warum.

d. Geben Sie – wenn es möglich ist – ein Beispiel von einer linearen Abbildung aus $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Erklären Sie kurz.

2. Gegeben ist

$$\begin{aligned} h \ : \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y; z) &\longmapsto (2x - y; 3y + z) \end{aligned}$$

a. Beweisen Sie, dass h linear ist.

b. Bestimmen Sie den Kern und das Bild von h.

c. Ist h injektiv? surjektiv? bijektiv? Erklären Sie kurz.

3. Gegeben ist ein Endomorphismus h des $\mathbb{R}^3$ durch

$$h((x; y; z)) = (3x - 2y + z\,;\, 2z - 3x\,;\, x + y - z)$$

a. Bestimmen Sie die Matrix H von h.

b. Berechnen Sie $\det(H)$.

c. Was sind dann $Im(h)$ und $Ker(h)$?

. / . Bitte Blatt wenden!

4. Ein Homomorphismus f aus $\mathbb{R}^p$ in $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch seine Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 18 & 22 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

a. Bestimmen Sie die Werte von p und n. Erklären Sie kurz.

b. Bestimmen Sie $Im(h)$, **ohne den Kern zu berechnen !**

c. Bestimmen Sie den Rang von h.

d. Ist h injektiv ? surjektiv ? bijektiv ? Erklären Sie kurz.