Algèbre Linéaire – 1

NOM et PRENOM : .... *Il faut tout justifier et expliquer !*

1. On donne $G = \mathbb{R}^2$ muni de l'addition $\quad (x;y) + (x';y') = (x + x' + 2; y + y' - 4)$.

a. Prouvez que $(G, +)$ est un groupe abélien.

b. On ajoute encore la multiplication habituelle par un scalaire. $(G, +, \cdot)$ est-il un espace vectoriel ? Justifiez !

2. a. Prouvez que $W = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Prouvez que l'ensemble $I_{[a;b]}$ des fonctions impaires définies sur un intervalle $[a;b]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}_{[a;b]}$ des fonctions définies sur $[a;b]$.

3. Déterminez une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille

$$F = ((2;-1;-3), (-4;2;6), (3;1;-1), (5;5;3))$$

4. On donne la famille $F = ((7;2), (-3;8))$ de $\mathbb{R}^2$.

a. Prouvez – **avec les définitions originales !** – que F est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminez les composantes du vecteur $w = (4;12)$ dans cette base F.

c. Déterminez les composantes de l'un des deux vecteurs e_1 ou e_2 de la base canonique (e_1, e_2) dans la base F.

Tournez s.v.p.

5. On donne la famille de vecteurs $H = (3 - x; 2x^2 - 1; 1 + x + x^2)$ de P_2.

a. Montrez que la famille H est libre.

b. En déduire, à l'aide de la théorie (Proposition 13 exclue) et sans prouver qu'elle est une famille génératrice de P_2, que H est une base de P_2.

c. Déterminez les composantes du vecteur $3x^2 - 7x + 2$ dans la base H.

6. Prouvez le résultat suivant :

Soient V un espace vectoriel et V_1, V_2 et V_3 des sous-espaces vectoriels de V. Alors $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ est encore un sous-espace vectoriel de V.